Ejercicio 1 Del Modelo 2 del 2020 (Análisis)

(2'5 puntos) Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

La regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a-\delta, a+\delta]$, derivables en $(a-\delta, a+\delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞, y si $x\to\infty$.

Tenemos $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2} = \left\{\frac{0 - \ln(1) - 0}{0} = \frac{0}{0};\ L'H\right\} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1\cdot e^x + xe^x - \frac{1}{1+x} - (a+1)\cdot 1}{2x} = \frac{1 + 0 - 1 - (a+1)}{0} = \frac{-(a+1)}{0}.$$

Como me dicen que el límite es finito, es decir que existe el límite, tenemos que seguir aplicándole la Regla de L'Hôpital para lo cual el numerador "$-(a+1)$" tiene que ser cero, de donde $a + 1 = 0$, es decir **a = -1.**

Seguimos: $\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot e^x + xe^x - \frac{1}{1+x}}{2x} = \left\{\frac{1 + 0 - 1}{0} = \frac{0}{0};\ L'H\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^x + xe^x - \frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1 + 1 + 0 + 1}{2} = 3/2$,

por tanto a = -1 y el límite vale 3/2.

Ejercicio 2 Del Modelo 2 del 2020 (Análisis)

(2'5 puntos) Determina la función $f: (-1,+\infty) \to R$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto (0, 1), $f'(0) = 0$ y $f''(x) = \frac{1}{x+1}$.

Solución

Por el Teorema Fundamental del Calculo Integral (TFCI).- Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función $G(x) = \int_a^x [f(t)]dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = \left(\int_a^x [f(t)]dt\right)' = f(x)$

En la práctica $f(x) = \int f'(x)dx$; $f'(x) = \int f''(x)dx$; $f''(x) = \int f'''(x)dx$, etc…..

En nuestro caso: $f'(x) = \int f''(x)dx = \int\frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) + K$.

De $f'(0) = 0$ tenemos $0 = \ln(1+0) + K = 0 + K$, luego $K = 0$ y $f'(x) = \ln(1+x)$.

Tenemos:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \ln(1+x)dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = dx \quad \Rightarrow v = \int dx = x \end{array}\right\} = \ln(1+x)\cdot x - \int x\cdot\frac{dx}{1+x} = x\cdot\ln(1+x) - \int\frac{x}{1+x}dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{sumo un cero}\\ \text{del tipo 1-1}\end{array}\right\} = x\cdot\ln(1+x) - \int\frac{1+x-1}{1+x}dx = x\cdot\ln(1+x) - \int\frac{1+x}{1+x}dx - \int\frac{-1}{1+x}dx = x\cdot\ln(1+x) - \int dx + \int\frac{dx}{1+x} =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - x + \ln(1+x) + L.$$

Como nos dicen que pasa por el punto (0, 1) tenemos $f(0) = 1$, es decir $f(0) = 1 = 0\cdot\ln(1) - 0 + \ln(1) + L =$ $= 0 – 0 + 0 + L$, luego $L = 1$ y **la función pedida es $f(x) = x\cdot\ln(1+x) - x + \ln(1+x) + 1$.**

Ejercicio 3 Del Modelo 2 del 2020 (Algebra)

Considera el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{array}\right.$

a) Discútelo según los valores de a. (1'75 puntos)

b) Resuelve, si es posible, el sistema para a = 1 y a = -2. (0'75 puntos).

Solución

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

(a)

Discútelo según los valores de a.

Sean $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para ver para que valor de a hace cero dicho determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}_{F_3+F_2+F_1} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2+a & 2+a & 2+a \end{vmatrix} = (2+a)\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = (2+a)\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} =$$

$= (2+a)\cdot(1-a)\cdot(0-a+1) = (2 + a)(1 - a)(1 - a)$.

Si $|A| = 0$, tenemos $(2 + a)(1 - a)(1 - a) = 0$, de donde a = -2 y a = 1 (doble).

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, $|A| \neq 0$ luego rango (A) = rango(A^*) = 3 = nº de y rango incógnitas, y por el Teorema de Rouchè el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si a = 1, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Obsérvanos que las tres filas tanto en A como en A* son iguales por tanto, tenemos **rango(A) = rango(A*) = = 1** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Si a = -2, tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{F_3+F_2+F_1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 3\cdot(4 - 1) = 9 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

(b)

(b)

Resuelve, si es posible, el sistema para a = 1 y a = -2.

Hemos visto en el apartado (a) que **para a = -2 el sistema es incompatible y no tiene solución**, y además que **para a = 1** teníamos **rango(A) = rango(A*) = 1** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Como el rango es uno, con una ecuación es suficiente:

Tenemos x + y + z = 1, tomando $y = \lambda \in R$ y $z = \mu \in R$, **las infinitas soluciones del sistema son:**

$(x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$ con $\lambda, \mu \in R$.

Ejercicio 4 Del Modelo 2 del 2020 (Geometría)

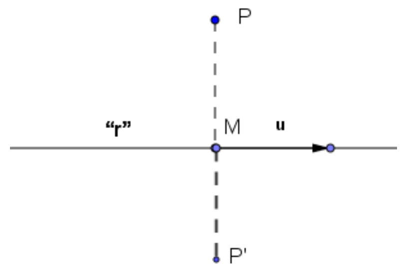
Considera el punto P(1, 0, -1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

(a) Determina el punto simétrico de P respecto de la recta r. (1'5 puntos)
(b) Calcula el punto de la recta r que dista √(6) unidades del punto P. (1 punto)

Solución

Considera el punto P(1, 0, -1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

(a)
Determina el punto simétrico de P respecto de la recta r.



Ponemos la recta r en forma vectorial, tomando z = b ∈ R. Tenemos x = 1 + b e y = -5 + 1 + b + 2b, es decir: r ≡ (x, y, z) = (1 + b, -4 + 3b, b) con b ∈ R. Un vector director de r es **u** = (1, 3, 1).

Tomamos punto genérico M de la recta r(A;**u**) (en vectorial), formamos el vector **PM**, y le imponemos la condición de perpendicularidad a dos vectores, uno el **PM** y otro el director **u** de la recta "r". Obtenemos el punto M, que será el punto medio del segmento PP', siendo P' el punto simétrico buscado.

Punto genérico de la recta "r", M(1 + b, -4 + 3b, b), formamos el vector **PM** = (1 + b - 1, -4 + 3b - 0, b + 1) = = (b, -4 + 3b, 1 + b), le imponemos la condición de que sea perpendicular a la recta "r" es decir a su vector de dirección **u** = (1, 3, 1), por tanto **PM•u** = 0 → (b, -4 + 3b, 1 + b)•(1, 3, 1) = 0 = b - 12 + 9b + 1 + b = 0, de donde 11b = 11, es decir **b = 1** y M es M(1 + (1), -4 + 3(1), (1)) = M(2, -1, 1).

De M punto medio del segmento PP' tenemos: (2, -1, 1) = ((1 + x)/2, (0 + y)/2, (-1 + z)/2), de donde:
2 = (1 + x)/2 → x = 4 – 1 = 3.
-1 = (0 + y)/2 → y = -2 – 0 = -2
1 = (-1 + z)/2 → z = 2 + 1 = 3.

El punto simétrico pedido es P'(3, -2, 3).

(b)
Calcula el punto de la recta r que dista √(6) unidades del punto P.

Tomamos punto genérico Q de la recta r(A;**u**) (en vectorial), formamos el vector **PQ**, y le imponemos la condición de que la distancia de Q a P sea √(6), es decir d(P, Q) = ||**PQ**|| = √(6).

Punto genérico de la recta "r", Q(1 + b, -4 + 3b, b), formamos el vector **PQ** = (1 + b - 1, -4 + 3b - 0, b + 1) = = (b, -4 + 3b, 1 + b).

De ||**PQ**|| = √(6) → $\sqrt{(b)^2 + (-4 + 3b)^2 + (1 + b)^2} = \sqrt{6}$.

Elevando al cuadrado, desarrollamos y simplificamos:

$b^2 + 16 + 9b^2 - 24b + 1 + 2b + b^2 = 6 \rightarrow 11b^2 - 22b + 11 = 0 \rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0$. $b = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$ (doble),
luego el punto Q pedido es Q(1 + (1), -4 + 3(1), (1)) = Q(2, -1, 1). Si nos damos cuenta era el punto M del aparatado anterior.

Ejercicio 5 Del Modelo 2 del 2020 (Análisis)

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$ para $x \neq 2$.

a) Estudia la derivabilidad de f. (1’25 puntos)
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1’25 puntos)

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ para $x \neq 2$.

(a)
Estudia la derivabilidad de f.

Sabemos que la función $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ es continua en todo R menos el 2 (número que anula el denominador), porque la función valor absoluto es continua en todo R.

De $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ +x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ tenemos $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Para estudiar la derivabilidad sólo nos falta ver la derivabilidad en x = 0, y estudiaremos la continuidad de la derivada porque la función si es continua en x = 0.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ;\quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-1\cdot(2-x) - (-1)\cdot(-x)}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1\cdot(2-x) - (-1)\cdot(x)}{(2-x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que f(x) sea derivable en x = 0, $f'(0-) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = f'(0+) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$, veremos la continuidad de la derivada.

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-}\left(\frac{-2}{(2-x)^2}\right) = \frac{-2}{4} = -1/2. \quad f'(0+) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{2}{(2-x)^2}\right) = \frac{2}{4} = 1/2.$$

Como f ‘(0-) = -1/2 ≠ f ‘(0+) = 1/2, la función f(x) no es derivable en x = 0, es decir la función f(x) es continua en R – {2} y derivable en R – {0, 2}.

(b)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f ‘(x)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ;\quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si x < 0, de f ‘(x) = 0 → -2 = 0, lo cual es absurdo luego será estrictamente creciente o decreciente en x < 0.

Si x > 0, de f ‘(x) = 0 → 2 = 0, lo cual es absurdo luego será estrictamente creciente o decreciente en x > 0.

Como f ‘(-1) = -2/9 < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente (↘) en (-∞, 0)**

Como f ‘(1) = 2/1 > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente (↗) en (0,+∞) – {2}**

Por definición en x = 0 hay un mínimo relativo, no derivable, que vale f(0) = 0.

Ejercicio 6 Del Modelo 2 del 2020 (Análisis)

Considera las funciones f, g : R → R definidas por $f(x) = -4x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + c$.
a) Halla el valor de c sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo. (1 punto)
b) Para c = - 3 calcula el área de la región limitada por ambas gráficas. (1’5 puntos).

Solución

Considera las funciones f, g : R → R definidas por $f(x) = -4x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + c$.
(a)
Halla el valor de c sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo.

Sabemos que $g(x) = -x^2 + 2x + c$ alcanza su máximo en el vértice de su gráfica que es una parábola.

Tenemos g '(x) = -2x + 2. De g '(x) = 0 $\rightarrow$ -2x + 2 = 0, de donde x = 1 que será la abscisa de su máximo relativo. Veámoslo: De g ''(x) = -2, cómo g ''(1) = -2 < 0, x = 1 es un máximo relativo.

De $f(1) = g(1) \rightarrow -4(1) + 2 = -(1)^2 + 2(1) + c \rightarrow -2 = 1 + c$, **de donde c = -3.**
(b)
Para c = - 3 calcula el área de la región limitada por ambas gráficas.

La gráfica de f(x) = -4x + 2 es la de una recta que pasa por los puntos (0, 2) y (1, -2).

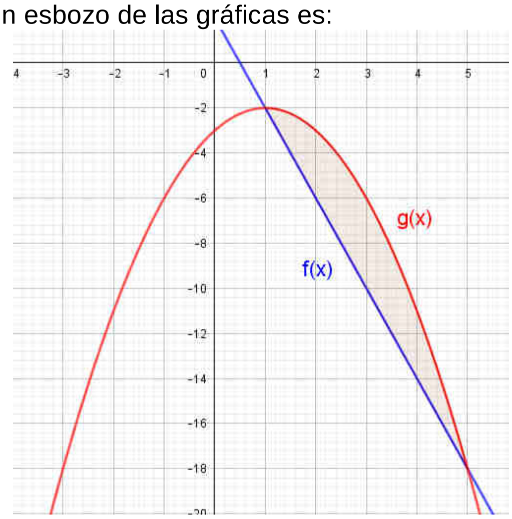
La gráfica de $g(x) = -x^2 + 2x - 3$ es una parábola así ($\cap$) porque el número que multiplica a x^2 es negativo.
Con vértice en el punto (1, -2), lo hemos visto en el apartado (a).
Cortes con los ejes:

Si x = 0, punto (0,0)

Si $g(x) = 0 = x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$, que no tiene soluciones reales por tanto no corta al eje de abscisas OX.

Veamos los cortes de la gráfica de f(x) con la g(x). Igualamos f(x) = g(x) $\rightarrow$ $-4x + 2 = -x^2 + 2x – 3$, de donde tenemos $x^2 - 6x + 5 = 0. \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2}$, es decir se cortan en la abscisa x = 1 (punto (1, -2)) y la abscisa x = 5 (punto (5, -18)).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es:



El área pedida es:

$$\int_1^5 (\text{parabola - recta})dx = \int_1^5 (-x^2 + 2x - 3 - (-4x + 2))dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x \right]_1^5 =$$

= (-125/3 + 75 – 25) – (-1/3 + 3 – 5) u^2 **= 32/3 u^2 = 10'6667 u^2**.

Ejercicio 7 Del Modelo 2 del 2020 (Algebra)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{37} y A^{41}. (1'5 puntos)
b) Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. (1 punto)

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

(a) Calcula A^{37} y A^{41}.

$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 .$$

Expresamos 37 y 41 como potencias de 3 con la división entera, porque $A3 = I_2$.
$37 = 3\cdot 12 + 1$ y $41 = 3\cdot 13 + 2$, luego:

$$\mathbf{A^{37}} = A^{3\cdot 12 + 1} = (A^3)^{12}\cdot A^1 = (I_2)^{12}\cdot A = I_2\cdot A = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A^{41}} = A^{3\cdot 13 + 2} = (A^3)^{13}\cdot A^2 = (I_2)^{13}\cdot A^2 = I_2\cdot A^2 = \mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b)
Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 1/4 + 3/4 = 1.$$

$\mathbf{det(3A^{52}(A^t)^4) =}$ $\det(3A\cdot A^{51}(A^t)^4) = \{i, ii, iii\} = \det(3A)\cdot\det(A)^{51}\cdot\det(A)^4) = 3^2\cdot 1\cdot 1^{51}\cdot 1^4$ **= 9.**

Propiedades usadas:
(i) Sabemos que $\det(k\cdot A_n) = (k)^n\cdot\det(A_n)$.
(ii) Sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$.
(iii) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Ejercicio 8 Del Modelo 2 del 2020 (Geometría)

Considera los vectores **u** = (2, 1, 0), **v** = (1, 0, -1) y **w** = (a, b, 1).
a) Halla a y b sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que w es ortogonal a u.
(1.5 puntos)
b) Para a = 1, calcula el valor o valores de b para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas. (1 punto)

Solución

Considera los vectores **u** = (2, 1, 0), **v** = (1, 0, -1) y **w** = (a, b, 1).
(a)
Halla a y b sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que **w** es ortogonal a **u**.

Sabemos que si los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes uno de ellos es combinación lineal de los otros dos y el determinante de los tres vectores es cero, es decir**:**

$$\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3+F_2 \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a+1 & b & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = -(-1)\cdot(2b - a - 1) = 0 = 2b - a - 1 = 0.$$

Si los vectores **w** y **u** son ortogonales su producto escalar (•) es cero.
w•u = 0 = (a, b, 1)•(2, 1, 0) = 2a + b = 0, de donde b = -2a $\rightarrow$ 2(-2a) - a - 1 = 0 $\rightarrow$ -5a - 1 = 0, **de donde obtenemos a = -1/5 y b = 2/5.**
(b)
Para a = 1, calcula el valor o valores de b para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas.

Tenemos los vectores **u** = (2, 1, 0), **v** = (1, 0, -1) y **w** = (1, b, 1).

Sabemos que el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **u**, **v** y **w**, es el valor absoluto (lo notaremos | |) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de los tres vectores **u**, **v** y **w**. (El producto mixto de tres vectores era su determinante.)

$$\text{Tenemos } |\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| = 6\ u^3 = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3+F_2 \end{array} \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & b & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} \right| = |-(-1)\cdot(2b - 2)| = 6.$$

Tenemos la ecuación |2b - 2| = 2, que nos proporciona dos ecuaciones:

+(2b - 2) = 6 $\rightarrow$ 2b = 8 $\rightarrow$ b = 4. **Un vector es w** = (1, 4, 1).
-(2b - 2) = 6 $\rightarrow$ -2b = 4 $\rightarrow$ b = -2. **Otro vector es w** = (1, -2, 1).